

中美逆运算渗透教学对比研究

宗 理

(江苏省南京市北京东路小学,210008)

摘 要:中美逆运算的教学都是渗透在数的运算教学中,随例题、练习的学习一并进行的。通过中美逆运算渗透教学的案例对比研究,以及前测和后测的数据分析,发现两国在教学内容、教学方式方面存在差异,从而揭示中美数学教学的特点,以便两国相互借鉴、取长补短。

关键词:逆运算 渗透教学 对比研究

2016年,笔者有幸加入了美国国家自然科学基金资助的数学教育科研项目“小学教学中的代数教学知识:国际比较研究”,参与了中美早期代数知识教学的对比研究。我们主要借助逆运算和运算律的教学,通过中美教学案例的对比,探索两国小学数学代数知识的教学是如何进行渗透、引入和发展的。研究中,中美逆运算渗透教学的差异,引起了笔者深入研究的兴趣。

一、逆运算及其教学价值

“逆运算”这一概念,对于数学教师来说并不陌生。减法是加法的逆运算,除法是乘法的逆运算。简单来说,我们可以这样理解:在一个等式中,用相反的方法,从得数求出原来的某一个数,这种运算就是原来运算的逆运算。如 $3 \times 4 = 12$,可用除法由得数12求出乘数3

或乘数4,所以除法是乘法的逆运算。

我国的《义务教育数学课程标准(2011年版)》中并没有“逆运算”的相关概念和说明,教材中也没有专门的、明确的逆运算教学内容,多数教师将其渗透在数的运算教学中,通过例题、练习的学习一并进行。而在美国的《学校数学教育的原则和标准》中,“逆运算”指向的是“数与量”和“代数”两部分教学内容(相当于我国的“数与代数”内容)中的“理解运算的意义及各运算间的联系”,通过计算教学和算式组的教学进行渗透。其实,逆运算的渗透教学具有发展学生的数感、运算能力的功能。

二、中美逆运算渗透教学的实验数据分析

中美两国有关逆运算的渗透教学主要集中在小学一、二年级。为了更好地了解中美

两国学生对逆运算关系的理解及应用情况,项目组设计了针对性的前测和后测问卷(中英双语)。以一年级上册的加减法逆运算渗透为例,测试卷共设计了8个问题。

问题1提供了具体的实物图(见图1),问题2提供了抽象的符号图(见图2),问题3提供了文字素材(见图3),问题4提供了三个关联的数字素材(见图4)。它们要求学生分别在教学前后,根据这些素材,写出一组相关联的算式或解答过程。这四个问题层次递进,从不同的抽象程度考查学生对加减法之间关系的认识(由于与逆运算渗透的关系不大,故不展开分析)。

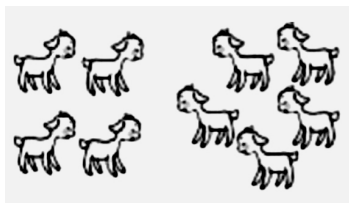


图 1

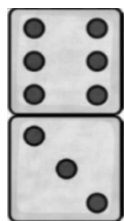


图 2

- 3.(a)小丽有7只气球,小强有4只气球。小丽比小强多几只气球?请写出解题过程。
 (b)小丽比小强多3只气球,小强有4只气球。小丽有几只气球?请写出解题过程。
 (c)小丽有7只气球,她比小强多3只气球。小强有几只气球?请写出解题过程。

图 3

4.请用6, 7, 13写一组关联的算式。

图 4

问题5~问题8,则通过开放式的设问,了解学生在实际运算中运用逆运算知识解决问题的情况。例如,问题6要求学生回答“ $81-79=()$ ”,并解释得出这个答案的思考过程。前测问卷中,学生面对这个两位数减两位数的问题,给出了一些非常有意思的思考方法。图5~图8是几个典型的回答(a、b是

美国学生,c、d是中国学生)。

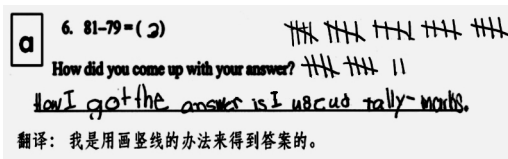


图 5

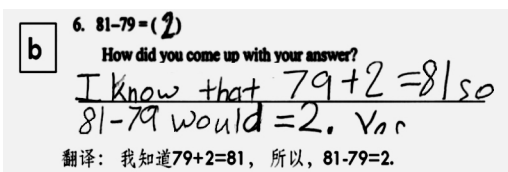


图 6

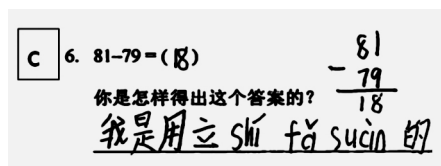


图 7

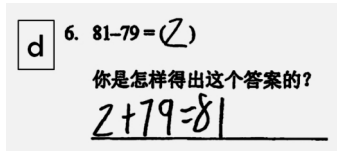


图 8

从两国学生的表达中,我们能看到一些共同和不同的地方。生b和生d都是用“想加法,算减法”的方式解决问题的,说明他们对加减法之间的关系认识比较充分,能在这个相对复杂的问题中调用逆运算方法正确解决问题。生a试图用画竖线的方式寻求答案,虽然最后答案正确,但画的过程不能明显看出思路。生c看起来是运用了列竖式的方式,但实际计算中,由于没有理解竖式减法的运算方法,出现了错误。

在之后的数据统计中,我们也发现,前测数据中,中美学生正确解决这个问题并清楚说明思考方法的百分比分别是75%和30%,运用逆向思维方式解决问题的百分比分别是

13%和3%，中国学生正确解答比率和逆向思维比率均远高于美国学生。后测数据中，中美学生正确解决这个问题并清楚说明思考方法的百分比分别是72%和50%，中国学生的正确率有所下降，美国学生的正确率大幅提高；双方学生运用逆向思维解决问题的比率均有所增加，中国增加了1%，达到14%，而美国增加了3%，达到6%。

问题5~问题8的汇总数据也显示出，在减法计算和减法的实际应用问题中，逆运算的应用在教学前后都有一定的变化，而中国学生在这一方面的表现要明显高于美国学生。造成这一现象的原因究竟是什么？这需要回到两国数学课堂中寻找答案。

三、中美逆运算渗透教学的异同情况对比

(一) 教学内容方面

苏教版小学数学一年级教材中，在学生分别认识加减法，形成加法表示“合在一起”、减法表示“去掉”的初步概念后，接着就是“一图四式”例题(见图9)。这是典型的加法和减法之间互逆关系的渗透，同一幅图、同样三个数字，可以写出两道加法算式和两道减法算式。后面的练习中，则反复出现“一图四式”的习题。学生在相互联系的四个算式中不断地感受“部分+部分=总数”“总数-部分=另一部分”，即减法“和-加数=另一个加数”是加法“加数+加数=和”的逆运算。同样地，二年级教材中，在学生学完乘法和除法的意义之后，很快就有用乘法口诀来求商和乘除法放在一起的算式比较练习(见图10)。由此，让学生体会乘除法之间的互逆关系。

美国教材与中国教材一样，将具有互逆关系的两种运算同时呈现，但比中国教材更

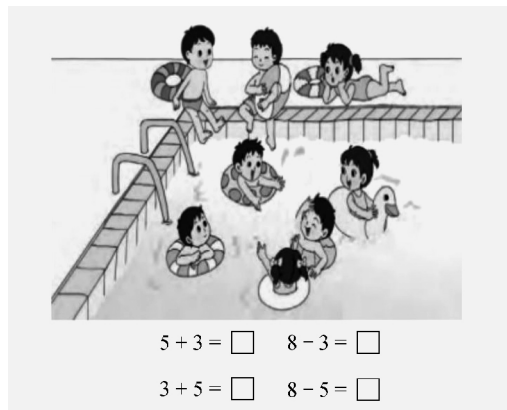


图9

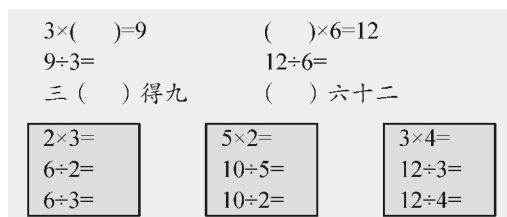


图10

突显加减、乘除之间的互逆关系。美国教材中逆运算渗透的内容更广泛、形式更多样、表达更直白。美国教材中逆运算除了渗透在计算内容中，还大量出现在解决实际问题内容中。教材中出现了很多“反叙”的实际问题，如“我拿出了6只企鹅，盒子里还有9只企鹅，原来盒子里有多少只企鹅”。这样的问题可以用加法($9 + 6 = \boxed{15}$)，也可以用减法($\boxed{15} - 6 = 9$)；所求的量用方框表示后可以出现在等式的左边，也可以出现在等式的右边。此外，在形式上，用不同的符号(如圆、方框、椭圆)表示不同性质的量，在表达上，将各部分之间的关系直白地表达两遍，非常强烈地表达出了编者渗透互逆关系的意图(见图11)。

中美教材中将具有互逆关系的两种运算同时呈现，将逆运算渗透在计算内容和解决实际问题内容中，说明对逆运算在早期代数

Problem 1	Multiplication	Division
	$\square \times \textcircled{5} = 15$	$15 \div \textcircled{5} = \square$
	number of groups (factor)	group size (factor)
	total (product)	total (product)
	group size (factor)	number of groups (factor)
Problem 2	Multiplication	Division
	$\square \times 5 = 10$	$15 \div 5 = \square$
	number of rows (factor)	number in each row (factor)
	total (product)	total (product)
	number in each row (factor)	number of rows (factor)

图 11

知识教学中的价值认识是相近的。

(二)教学方式方面

1. 连贯性的差异。

美国教材如此注重加减之间、乘除之间的逆运算关系,为什么前后测的对比中,中国学生对逆运算的掌握更有效呢?这与中美教学的连贯性差异有很大关系。

(1)话语连贯性的差异。

大多数中国教师的课堂用语是经过推敲的,并带有较强的目的性。比如,教学“一图四式”,出示主题图(图 9)后提问:“从图上获得了哪些信息?”学生的关注点不同,回答各不相同:“有 3 个女孩。”“有 1 个戴着‘小鸭子’游泳圈。”“有 3 个孩子游累了,上岸了。”……最终,在教师的引导下统一成:岸上有 3 个小朋友,水池中有 5 个小朋友,一共有 8 个小朋友。这样的信息有利于学生接下来表达四道算式意义的话语连贯。另外,中国教师课堂上过渡语的运用也使得课堂更流畅。比如:“刚才我们根据一幅图写出了四道算式,现在你会不会根据一幅图写出四道算式呢?下面老师要来考考大家。”“你会用‘想加法,算减法’的方法计算下面这些题目吗?”“比一比每一组的乘法算式和除法算式,你有什么发现?”……过渡性语言可以连接准备好的教学活动,让学生明确活动要求,明了环节目的,更容易建立起知识的连贯性。

我们观察的美国课堂中,教师的话语经

常会被学生打断,甚至会被自己打断。比如,一位美国教师教学“Fact Family”(算式组,也就是中国的“一图四式”),选择让学生用购物的情境来表征“6+7”时,先用抽签的方式选出班上两个学生的名字来表示购物情境中的两个人物,再选择购物内容。学生说购买“海豚”,结果没有找到海豚的图片。教师试图用小企鹅图片代替,学生不同意,最终只能用了鲨鱼图片。教师随意说了一句:“希望鲨鱼不要吃掉海豚。”接着,一张张出示鲨鱼的图片,并描述:“有好多鲨鱼在大海里游泳,一条、两条……十三条。这么多条鲨鱼,老师可不敢在大海里游泳了……”然后,教师才回到主题,让学生用选定的人名和鲨鱼创编两道加法和两道减法的故事。学生由于获得的信息不流畅,且被教师随意的话语干扰,编故事时言语断断续续,难以捕捉情境中的重要数学信息。整个表征过程花了较长的时间,影响了学生对主题的理解。

然而,辩证地分析中美课堂教师话语连贯性的差异,我们也会发现,中国学生在课堂上遇到的情境大多是纯粹的数学问题,而面对实际问题,需自己寻找解题的重要信息,尤其受到非数学信息干扰时,经常表现出束手无措,解决实际问题的能力偏弱。而美国学生因长期处于信息量多、信息杂乱的课堂环境,搜索、分析、抓取有效信息以及解决实际问题的能力要强于中国学生。

(2)环节连贯性的差异。

中国的课堂中,教师设计的不同环节环环相扣、层层递进,这有利于学生对所学内容的理解和掌握。比如,在一年级教学“8 的加减法”(包括“一图四式”)时,首先复习“7 以内的加减法”计算,并选择一两道题说说计算方

法,巩固“分与合”或者“想加法,算减法”的计算方法;接着教学主题图,分析四道算式之间的联系,体会逆运算关系;最后通过多种形式练习“一图四式”和8的加减法计算方法。整个教学过程是非常流畅、连贯的。

美国的课堂教学一般分在两个区域进行。一个是活动区域,有地毯,学生可随意地坐在这里参加教学活动;另一个是作业区域,有桌椅,学生可以坐在这里写作业、做练习。在美国,50~60分钟时长的课堂上,较多的时间里学生在作业区域,独立完成练习,教师进行个别辅导。中国课堂环节的连贯性更多地体现出教师备课时的逻辑性,但这也恰恰导致了课堂上学生的思维往往被教师的备考思路主导,因而缺失了独立思考的空间。因此,过于强调教学环节的连贯,并不一定有利于学生思维的连贯。相反,美国课堂看似不连贯的教学环节,却让学生有了更多独立思考的机会,教师的个别辅导可能更贴合学生个体的学习需求。

(3) 单元连贯性的差异。

中国课堂的连贯性除了一节课内的连贯,还强调同一单元课与课之间的连贯。比如,一年级《10以内的加减法》单元有两条线索:一条是解决实际问题,“一图二式—一图四式—图画应用题”是连贯的;另一条是计算,“加法—减法—6、7的加减法—8的加减法—9的加减法—10的加减法—连加、连减”也是连贯的。就是在这样的相似内容的教学过程中,重复着计算方法,重复感知着减法和加法之间的互逆关系。单元结束时,学生都能比较熟练地进行计算。

同是复习课,美国的一段教学录像中,让学生来说一说计算“ $12-4=?$ ”的另一种技

巧,教师整整用了7分多钟的引导,学生才终于想到“因为 $4+8=12$,所以 $12-4=8$ ”这种“想加法,算减法”的逆运算方法。这与美国课与课之间不连贯有很大关系,因为不连贯,对重要的学习方法较少重复,导致学生不能有效掌握。

中美课堂连贯性的差异与教学观念的理解不同有关。美国教师认为教学是十分独立的、私人的活动,而不是公开活动,他们不喜欢有人听课,同时也极少有机会观察其他教师的教学。这种独立使美国教师很难计划和实施连贯的教学。在中国,环境鼓励教师按照连贯的方式来备课,其中充满了支持要素。例如,详细的教学指导书,有经验的教师的备课计划,教研组内的讨论,示范课、观摩课,这些都能够促使教师按连贯的方式计划和实施课堂教学。

2. 内容比较和错误利用的差异。

笔者对比观察中美逆运算渗透教学的课堂,发现两国教师在内容比较和错误利用上有明显的差异。

(1) 内容比较的差异。

比较就是辨别事物的异同,是一种最基本的认知活动。比较是对两种事物之间共同点与不同点的判断思维过程,有利于洞察事物的本质。

中国课堂上的内容比较随处可见。比如:出示例题后,提问“例题和刚才的复习题有什么不同”,让学生进行纵向比较;出现算法多样化时,提问“你喜欢哪种方法?为什么”,让学生进行横向比较;几位学生回答同一个问题时,提问“谁的回答是正确的”;做完题目组练习后,提问“比较一下,你能发现什么规律”……内容比较成了很自然的一种学习

状态。逆运算的渗透教学依赖于比较,教学“一图四式”时,当学生列出“ $5+3=8,3+5=8$ ”后,比较这两道加法算式的异同点;列出“ $8-3=5,8-5=3$ ”后,比较这两道减法算式的异同点;接着,比较这四道算式的异同点。学生说出“加法算式的得数跑到了减法算式的最前面,加法算式的两个相加的数跑到了减法算式的后面”时,已经感受到减法是加法的逆运算了。

我们观察美国的课堂中,少有对内容的比较。比如,一位美国教师教学一年级的“Fact Family”,在黑板上写出算式“ $7+1=8,8-7=,8-1=$ ”后,提问:“我们来看看这道加法算式是怎样来帮助我们解决这两个减法算式的。”学生讨论:“ $7+1=8$ 说明8比7多1,所以 $8-7=1$ 。”“它们都用到了7、1、8。”教师启发:“像这样的算式,我们可以起个名字——”学生回答:“算式家庭。”教师引导:“‘算式家庭’中还少一道加法算式,谁能来用学具小方块摆一摆?”学生用学具摆完后,写出了“ $1+7=8$ ”。接下来的环节,教师继续让学生用小方块来摆两道减法算式的意义,并写上得数,让“算式家庭”更完整。整个过程中,教师没有引导比较,倒是学生自发地通过比较,发现了三个相同的数字。

中美课堂上内容比较的差异与两国不同的教学目的有关。中国教师希望学生掌握一般性方法,并且会将这种方法迁移到其他的问题情境中;美国教师则希望学生能解决问题,而不管他们使用什么样的策略。所以,美国学生算法多样,会运用大量直观的方式进行计算;而中国学生更喜欢运用抽象的方法和符号表征,通常运用简便的计算方法。

(2) 错误利用的差异。

中国教师不仅喜欢纠正学生的错误,而且喜欢分析错误的原因。比如,当学生说出“ $12-4=9$ ”时,教师追问:“你是怎么想的?”学生回答:“因为 $4+9=12$,所以 $12-4=9$ 。”教师进一步启发:“重新想一想, $4+9$ 等于几?”继而总结:“同学们,看来要准确计算20以内的减法,加法计算一定要过关。”中国教师认为,来自个别学生的错误是很有价值的,在课堂上公开讨论这些错误能使全体学生受益。

在美国教师的观念中,错误被理解为对学习任务失败的一种表征,错误反映的不是缺乏知识而是缺少能力。他们认为,公开讨论错误会使学生尴尬,失去自尊。所以,课堂上,教师几乎很少纠错,更别说利用错误开展教学了。

需要说明的是,中美逆运算渗透教学的对比研究,并不是为了辨出优劣、分出高下,而是为了更多地了解中美教育教学的特点,以便两国相互借鉴、取长补短。特点不一定是优点;特点有积极的一面,也有消极的一面。比如,中国课堂的连贯性提高了课堂教学的效率,但当连贯逐渐成为一种思考方式,就会降低对模糊性的忍耐力,而这正是创造性的一个条件。

参考文献:

- [1] 范良火等. 华人如何学数学[M]. 南京:江苏凤凰教育出版社,2017.
- [2] 蔡金法,江春莲,聂必凯. 我国小学课程中代数概念的渗透、引入和发展:中美数学教材比较[J]. 课程·教材·教法,2013(6).