

数学表征与儿童数学思维发展

——基于中美比较视角

吴 贤

(江苏省南京市北京东路小学, 210008)

摘 要: 数学教学的目的之一是发展学生的数学思维。在小学代数教学的中美比较研究中发现, 中美教师的表征意识、表征方式和对待学生数学表征的态度具有较大差异。教师应当充分认识数学表征对儿童数学思维发展的价值, 合理使用多种数学表征工具提升儿童数学思维。

关键词: 数学表征方式 思维发展 中美比较

数学教学的一个目标是:“体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系, 运用数学的思维方式进行思考, 增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。”通过数学学习, 发展学生数学思维水平, 提高学生处理实际问题的能力, 应该是数学教育的目标和价值所在, 也是数学教育研究的重要内容。

2016年, 由美国天普大学教育学院丁美霞博士和南京师范大学马复教授共同主持的数学教育科研项目“小学教学中的代数教学知识: 国际比较研究”, 让我们有了“零距离”观摩中美两国小学代数教学的机会。在这一过程中, 我们发现, 中美两国的小学代数教学, 无论是课程内容的安排, 还是教学目标、

教学过程和教学评价等方面, 都有着较为显著的差异, 这些差异也集中体现在代数知识的数学表征和两国学生的数学思维发展上。鉴于此, 探讨中美两国在小数代数教学中数学表征对数学思维发展的影响, 成为一个让人感兴趣的研究方向。

一、中美数学教学中的表征及其标准

在此次项目研究中, 美国教师一直在通过访谈的方式, 了解中国教师备课时的教学目标设定, 其中特别要求中国教师详细说明“这节课准备用怎样的表征方式, 帮助学生理解概念”; 在录制视频后, 还会进一步询问“课堂上学生用什么方式进行表征”。而在观摩美国教师的教学录像时, 我们也经常能听到美国教师这样的提问:“对这个问题, 你是如

何表征的?“理解他的表征方法吗?”

什么是“表征”?为什么美国教师这么重视“表征”?“representation”一词,原是一个心理学概念,翻译成中文,字面意义为“表现、陈述”。但在教学领域,“representation”的含义非常丰富:它既指向学习者内部的心智活动,又指向学习者外在的思维形式;它是思维活动表达的过程,也是思维活动呈现的形式。可以说,“representation”具有数学学习、交流工具和内容的双重身份。为了更好地体现它的丰富性,在教学领域,最终把它翻译为“表征”。

“表征”这一概念备受美国数学教育研究者的追捧,是因为在2000年4月由全美数学教师理事会确定的《学校数学教育的原则和标准》中,将其确定为五大过程性标准之一(其余四个为问题解决、推理与证明、交流、关联)。其中明确指出“表征既指过程也指结果”,也具体提出对了对美国学前期到十二年级学生表征学习的要求,如“创造和利用各种数学表征组织、记录和交流数学观念”“选择、应用和互换各种数学表征解决问题”“应用表征模拟并解释数学中的现象”。

相对来说,中国教师对表征概念还比较陌生。《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称“2011版课标”)并没有将“表征”纳入其中。不过,这并不表示中国教师完全不了解数学表征。2011版课标虽然没有明确应用“表征”这个术语,但也从不同角度表达了相同的意思,如数学学习“不仅包括数学的结果,也包括数学结果的形成过程和数学思想方法”,课程内容“要处理好过程与结果的关系,直观与抽象的关系,直接经验与间接经验的关系”。

二、中美小学代数教学中表征差异的比较

小学阶段是儿童早期代数思维的启蒙阶

段,而代数思维是儿童数学思维不断发展的一个重要指征。如何在代数教学中让儿童更好地理解 and 表达数量之间的抽象关系?中美两国教师都做出了非常有益的探索和尝试。

(一)表征意识的差异

美国教师在代数教学中,非常重视数学表征的应用。上课前,教师会准备大量实验材料,以方便学生表征。这些材料中,出现最多的是各种颜色的小正方体积木,也会有小正方形或各种形状的小纸片。教学中,教师会明确学生需要掌握的表征方法,如学习加法时,用小正方体积木表征算式的意义和结果;还会鼓励学生在教师示范的表征方法以外,采用动作、语言、图形等不同方式进行个性化的表征,如渗透分配律的过程中,通过摆正方形表征分配律的含义,并展示学生用画图、说理等方式的表征,让全班学生理解和模仿。可以说,美国教师在课堂教学中,表征意识非常强烈。

中国教师在数学教学中,即使不知道“表征”这一术语,也会有意识地引导学生进行数学表征。比如,在小学低年级,教师会给学生提供比较简单的材料(主要是小棒),让学生通过数一数、摆一摆的方式理解数量和数量间的关系;进入中年级后,直观形象的表征材料逐渐减少,教师更多的是引导学生用抽象的图示、算式等方式表征自己理解的数学关系。近年来,在学习方式变革的过程中,教师也更加重视让学生用自己的方式表征数学理解。特别明显的是,课堂上,教师常常让学生画一画、写一写,表达自己对数量关系的认识。

表征意识的差异,直接体现在学生的课堂学习过程中。美国数学课堂的学习主要方式是动手实践。在理解概念、表达关系的代

数知识学习中,说得不多,动得很多。教师常常要求学生用实物或模型表征数量间蕴藏的关系,最终可能就用一个具体的情况表征出一种抽象的关系。而我国代数知识的学习中,通过写、算、说的方式,积累大量正例,进行观察、比较,是学习的主要形式。教师最终都会要求学生用抽象的符号、语言表征这些规律,课堂学习主题明确,目标清晰,过程清楚。

(二)表征方式的差异

中美小学代数教学中,表征方式的差异特别明显。下面以“加法交换律”的教学为例进行说明。

美国在一年级课堂教学中,一边学习10以内的加减法,一边就开始渗透和介绍加法交换律了。教师使用的表征工具被称为“方块火车”,即两种颜色的小正体积木拼接成的柱体。首先,教师让学生用小正方体表征出算式 $2+4$ 的含义(如图1),再说 $2+4$ 的结果是几。这个表征的过程,每个学生都必须独立完成。教师和助教一直在学生中巡视和指导,确保每个学生都可以成功地用分散的小正体积木拼接出一个“方块火车”,掌握表征 $2+4$ 这个算式的方法。然后,教师让学生对图2进行算式表征(即 $4+2$)。接下来,教师就这两次表征的“方块火车”进行比较,让学生思考:这两个“方块火车”有什么区别?让学生旋转“方块火车”,发现两者之间的关系,再说出自己的发现。学习结束的整理中,也依然用这个例子,作为加法交换律的表征。



图 1



图 2

中国在四年级有专门的课时教学加法交换律。首先,教师提出一个实际的问题:28个男生在跳绳,17个女生在跳绳,跳绳的一共多少人?在学生列式解答之后,教师揭示得数相等,可以用等号连接两个算式,从而得到加法交换律的一个正例。接着,教师让学生寻找并口述这样的正例,在大量正例的观察比较中,体会加法交换律中的数量关系,并尝试用更为抽象的符号表征加法的这一数量关系。

从两个教学过程可以看出,美国课堂更侧重于采用直观表征的方式,用具体的实物、模型或图形等可视、可操作的材料、教具作为学生数学思考的表征素材。这不仅是对结果的表征,更是对过程、内涵的表征。而我国的数学课堂采用的是符号表征方式,让学生从具体情境中抽象出算式表征,然后进一步用算式表征,表达对关系的理解,概括出字母表征的形式。

综上,美国教师更喜欢直观表征,而中国教师更倾向使用符号表征,但两国在表征中的形式都比较单一。直观表征的好处是让学生认识到具体与抽象之间的关系,有助于学生思维从具体到抽象的发展;而符号表征更加严谨规范,能加深学生对关系的理解,发展学生的抽象能力。单一的表征形式会让学生形成比较单一的数学思维方式。所以,美国学生面对新的问题情境,更倾向于用原始、朴实的画面和简单、具体的操作,表征问题中的数量关系,以形象思维为主;而中国学生面对新的问题情境,则会尝试比较抽象的方式表征,如画线段图、列关系式,偏重逻辑思维。

(三)教师态度的差异

面对学生在问题研究中的不同表征,中美教师的态度也有所不同。下面,以“乘法分

配律”的教学为例进行说明。

美国教师在三年级的班上出示了两幅 6×4 的方格图,并提问:“可以用什么方法来得到乘积?”面对这一问题,学生给出了不同的表征方式。第一个学生横着圈出 4 个 6,6 个 6 个地数出得数;第二个学生竖着圈出 6 个 4,4 个 4 个地数到 24。这里,教师都只是让学生数出得数,没有进一步的要求。第三个学生先竖着分出 6 个 3,再横着分出 2 个 3(如图 3),然后数出得数。这时,教师让学生用乘法算式表示两步的思考过程。学生说出“ 3×6 ”和“ 3×2 ”后,教师提问:“那么数一数,一共是几个 6 呢?”根据学生的回答,教师又带着全体学生在图中再次数了数,确定是 4 个 6。第四个学生的方法比较特别:他先将图形平均分成四份(如图 4),然后算出每份的格数,再算四份的格数。教师迅速对这个问题表征方式给予充分肯定:“很棒!我们想到了很棒的方法!”并立刻举例:“有时我们会遇到更大的方格图,比如 12×10 或者 12×12 ,我们很难知道这样的题的答案。这时候,我们就可以用这样的方法。”

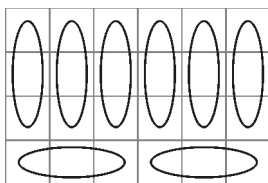


图 3

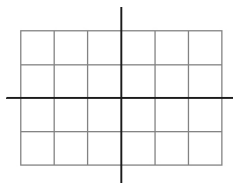


图 4

中国教师在这节课的观后评价中普遍担心:最后一种方格分割方式,会不会让学生混淆乘法结合律与乘法分配律?

面对学生在代数学习中的不同表征,两国教师的态度很好地说明了前面我们提到的思维方式。中国教师和学生数学思考中特别重视指向目标的逻辑思考,思维呈现比较鲜明的指向性;如果偏离既定的研究内容,就

会担心知识体系间的混淆。在实际教学中,教师很担心遇到学生这样天马行空的表征方法。而美国教师虽然也有内容指向,但教学中思维相对发散。因此,教师对学生这样偏离学习内容的表征,表现得更加淡定自若,甚至在教学活动中会停下原有的教学环节,单独解读这样的表征方法。由此带来的是两国学生在学业成就上的差异。课堂教学目标更为明确凝练,使得中国学生在学业水平测试中更容易获得好分数,但也产生了“中国学习者悖论”,即中国学生在创造性领域比较薄弱。

三、表征差异比较对儿童数学思维发展的启示

(一)充分认识数学表征对儿童数学思维发展的价值

在课堂教学录像的相互观摩中,两国教师都表现出对对方表征方式的浓厚兴趣。在看到美国教师用旋转“方块火车”的方式揭示加法交换律时,中国教师感到这种表征方式不仅非常有趣,而且更为形象生动;而在看到中国教师引导学生用大量形同“ $a+b=b+a$ ”的算式表征对加法交换律的理解时,美国教师表示这种表征方法的教学才更准确、更“数学”。其实,无论是直观表征还是符号表征,都是表征的一种形式,没有优劣之别。中美两国在小学代数教学中数学表征存在较大的差异,原因与两国课程标准的设定、数学教育的文化传统有着密切的关系。在儿童早期代数教学中,美国教师更重视数学表征教学,通过直观表征的方式组织学生的交流、学习,因此,美国学生在数学思考中也更依赖形象思维,动作表征、图像表征发展较好;中国教师关注学习内容的达成度,还没有将表征作为教学内容和结果的一个目标维度,因此,中国

学生偏重符号表征的学习方式,数学思维活动逻辑性强,相对来说形象思维能力比较弱。可以说,双方的表征方式都各有利弊。

有学者指出:“任何表征都能够表达部分但不是全部的信息,凸显其中的一些方面而隐藏另一些,所以说,单一的表征形式不利于学生对知识的全面理解。”因此,发展学生的多元表征能力,才能更好地融合中美两国数学教学所长,为学生在早期代数学习乃至其他领域的数学学习中,建立更为丰富立体的内、外部表征系统,建立更为完善的数学知识结构,从而提升学生在面对复杂问题时创造性思维和表达的能力。

在教学中,教师要尽量采用多元化的数学表征方式,在示范引领中鼓励学生开展个性化的多元表征,让学生在创建自己的多元表征过程中,把对数学内容的理解展现出来——不仅要重视符号表征的培养,还应该进行直观表征、直观表征与符号表征的联系等的训练。不过,令人欣喜的是,随着学习方式变革的深入,越来越多的数学课堂中呈现出多元表征的状态。在项目研究后期,中国教师教学“加法结合律”时,引导学生通过画图、拼摆、符号、言语等表征方式,表达对结合律含义的理解,使学生能将各种表征间的关系联系起来。

(二)合理使用多种数学表征工具提升儿童数学思维

我国低年级常用的教具是小棒,它在表达数量、理解算理和算法、认识十进制等领域,有着自己独特的优势。而在这次观摩中,我们发现,美国学生似乎没有使用小棒表征的习惯,他们的桌子上是一堆类似积木的学具(如图5)。这款积木称为 Snap Cube

(又名 Math Link),是一个个可以互相嵌入的小正方体,每个小正方体的六面都能和其他小正方体进行拼搭,所以又被称为“魔法方块”。在教学录像中,学生在加法、乘法计算,运算律渗透,算式组学习中,都会用这些神奇的小正方体积木进行数学表征。用魔法方块进行表征,不仅让表征过程更图形化、游戏化,还让学生对抽象的代数知识有了更直观的理解、表达和记忆。



图5

美国课堂中,类似魔法方块这样的直观表征工具不仅出现在代数知识的学习中,还在数学学习的其他领域起着重要的表征作用。这些看起来低幼化的学习材料,帮助学生在头脑中不断地建立平面与空间、具体和抽象的联系,构建出一个网络化、立体化的思维空间。

从多元表征的角度来看,丰富的表征工具有利于发展学生的多元表征能力。当然,小棒也好,魔法方块也好,都只是表征的辅助手段。只有在课堂学习中,引导学生创建个性化的多元表征形式,才能真正让学生的思维得到全面的发展,对数学知识建立更饱满、立体的认识。

[致谢:本文受到美国国家自然科学基金会在天普大学 CAREER 项目的资助(项目编号: DRL-1350068)。文章中的任何观点、发现和结论都属作者本人,不一定反映项目基金会的观点。]