

儿童早期代数思维的渗透与培养

——中美小学数学教学比较研究

陈 静

(江苏省南京市教师培训中心, 210024)

摘 要:早期代数思维的渗透与培养,并不是要让学生提前学习代数符号或表达式,而是初步感受代数的核心思想,为以后转换到代数学习做好准备。这对于很多教师来说,还是一个比较陌生的内容,可能是因为自身专业素养的缺失,以及对后续教材编排体系缺少了解,也可能是因为教材中没有明确的代数形式出现,通过哪些合适的教学内容提前渗透也是一个难题。对此,不妨从互逆运算、相等关系、多元表征等内容着手研究。

关键词:早期代数思维 互逆运算 相等关系 多元表征

2016年,我和几位教师加入了由美国国家自然科学基金会资助的一个五年(2014~2019)数学教育科研项目“小学教学中的代数教学知识:国际比较研究”。该项目负责人为美国天普大学数学教育副教授丁美霞博士,中方协调人为南京师范大学教师教育学院马复教授,参与研究的教师均为中美两国专家型教师(教龄10年以上、有获市级或以上教学奖经历的熟手教师)。项目研究选择了中美小学数学课堂(1~4年级)中与代数知识相关的教学内容,用问卷调查、访谈、录像课等形式进行比较研究,期望从中获取帮助学生顺利完成由算术到代数过渡的有效经验。

项目研究的现实背景,一是美国“大众代

数”(Algebra for all)、“早期代数”(Early Algebra)等理念的提出;二是中国学生的数学学习尤其是代数领域的成绩领先于美国,让美国教育者把目光投向中国小学数学教育领域,希望通过中美小学数学教育的比较研究,关注“早期代数”教学,从而带动美国数学课堂的改变。而对于中国教师来说,“早期代数”显然还不是深入人心的教学理念。尽管中国数学教育历来有重视代数教学的优良传统,但在普通教师的日常教学中,有意识地寻找“数与代数”的内在联系,并在算术教学中渗透与培养代数思维,尚有较大作为空间。因此,关注“早期代数”教学,重视对学生早期代数思维的渗透与培养,亦是中国小学数学

教师的重要努力方向。

一、早期代数思维的内涵及课程培养目标

如何理解早期代数思维？墨尔本大学麦克斯·斯蒂芬斯教授给出了浅显易懂的解释：早期代数思维是指虽然在小学低年级的数学中没有出现正式的代数形式，但在数的教学中需要注意培养学生对代数关系与结构的理解。可见，早期代数思维的渗透与培养，并不是让学生提前学习代数符号或表达式，而是让他们初步感受代数的核心思想，为以后转换到代数学习做好准备。

我国《义务教育数学课程标准（2011年版）》在各学段都安排了四个部分的课程内容：“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。“数与代数”被置于同一内容领域并贯穿于每一学段的教学之中。虽然代数知识（式与方程）的正式引入被安排在第二学段，但由于教学内容编排是螺旋上升、逐步加深的，所以在第一学段就已经有了代数知识的逐步渗透。由此可以看出，我们已经关注到“数与代数”教学的连贯性与一致性，并且在第一学段就为后续正式的代数学习做好了准备和铺垫。例如，在苏教版小学数学一年级教材中出现的如图1所示的解决问题的情境，其实就是早期代数思维的启蒙。“8+

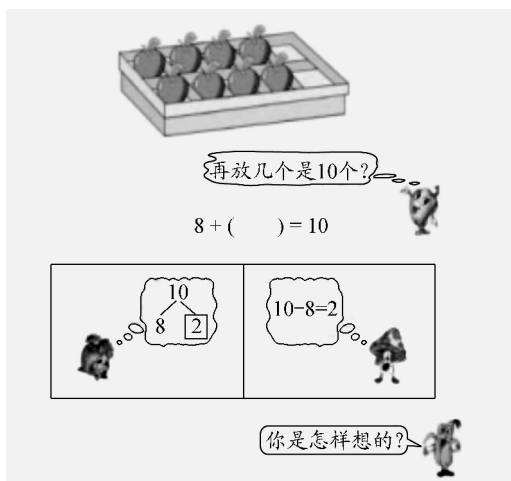


图1

$() = 10$ ”中的“()”可以看作“△”或“□”，也就是以后方程中的未知数。图中提供两种思维过程，引导学生思考“10可以分成8和几”（或“8和几可以凑成10”），以及采用“想减法，算加法”的思路。无论是对加减法互逆关系的运算，还是对加法算式中未知加数的求解，都可以渗透初步的代数思维，作为正式学习的铺垫。

美国的数学课程内容被划分为五大领域：“数与量”“代数”“几何”“测量”“数据分析和概率”。其中“数与量”和“代数”分别被置于两个不同的模块，导致代数与算术的教学不能很好地融合，很多学生对代数感到畏惧，以至于后续学习出现困难。因此，2000年全美数学教师理事会（NCTM）颁布了《学校数学教育的原则和标准》，指出学校代数不仅是一门课程，而且是一个“从学前教育就开始的课程链”，让学生在初中低年级甚至小学、学前就能初步接触到代数思维，使得数与代数的教学合理对接。2010年全美州长协会（NGA）与全美州首席教育官理事会（CCSSO）共同颁布了《数学州际共同核心标准》，特别提及“运算和代数思维”的教学标准（以1~3年级为例，见表1），还给出了相关核心概念的具

表1

运算与代数思维	一年级	表征和解决包括加减法在內的问题；理解和应用运算性质和加减法的关系；20以内的加减法；用加减法方程计算
	二年级	表征和解决包括加减法在內的问题；20以内的加减法；利用物体获得乘法的基础知识
	三年级	表征和解决包括乘除法在內的问题；理解乘法的性质和乘除法的关系；100以内的乘除法；解决包括四则运算在內的问题，并用算术识别和解释模式

体表述(以对“加法”的刻画为例,见表2)。

表2

加法	
未知结果	有2只兔子坐在草地上,又有3只兔子跳到那里,现在草地上一共有多少只兔子? $2+3=?$
未知变化条件	有2只兔子坐在草地上,又有一些兔子跳到那里,共有5只兔子。有几只兔子跳到那里? $2+?=5$
未知初始条件	一些兔子正坐在草地上,又有3只兔子跳到那里,共有5只兔子。之前草地上有几只兔子? $?+3=5$

表2中对加法模型的解释也印证了表1中对一年级“运算与代数思维”的要求,这样的要求与图1中问题的解决算式颇有相似之处。

从以上分析可以看出,中美两国都对早

表3

	中国(苏教版小学数学教材)		美国(Go Math/My Math)	
一年级	第一册第八单元	一图二式	Grade 1 T2	Fact Family(算式组)
	第二册第三单元	一图四式	Grade 1 T9	Commutativity of Addition(加法交换律)
二年级	第三册第三单元	6的乘法口诀	Grade 2 T3	Fact Family(算式组)
	第四册第六单元	三位数加三位数	Grade 2 T4	Fact Family(算式组)
三年级	第六册第一单元	两位数乘两位数(不进位)	Grade 3 T5	Multiplicative Inverse(乘除法的关系)
	第六册第一单元	练习课:发现乘法计算中的规律	Grade 3 T14	Distributivity (Informal)[分配律(渗透)]
四年级	第八册第六单元	加法交换律	Grade 4 T8	Multiplicative Inverse(乘除法的关系)
	第八册第六单元	乘法分配律	Grade 4 T15	Distributivity (Informal)[分配律(渗透)]

期代数思维的培养有明确的目标和要求,并在教材层面也有相应的贯彻和落实。那么,我们能否从实践层面进行分析、研究,寻找差距,获取经验呢?

二、早期代数思维渗透与培养的教学策略

我国对于代数知识的正式引入是在小学第二学段(4~6年级),美国引入时间略晚。小学阶段被认为是早期代数思维渗透与培养的关键时期,然而,早期代数思维的渗透与培养对于很多教师(尤其是长期执教第一学段的教师)来说,还是一个比较陌生的内容。这可能是由于自身专业素养的缺失,以及对后续教材编排体系缺少了解;也可能是因为教材中没有明确的代数形式出现,通过哪些合适的教学内容提前渗透也是一个难题。

(一)互逆运算——理解结构,把握关系

表3呈现的是中美两国研究课的部分课题。需说明的是,这些课题均是由教师自主选择,它们大多是相同或接近的,说明两国

中美学生 (G1-2) 对逆运算的理解

9+3=(12)
12-3=(9)

a How did you get the answer for 12-3=()?
I was at 12 I counted back 3.
翻译: 我从12 往回数了3。

b How did you get the answer for 12-3=()?
I know that 9+3=12, must equal 9.
翻译: 我知道9+3=12, 12-3一定等于9。

9+3=(12)
12-3=(9)

c 你是怎样得到12-3=()这个题的答案的?
先用12的2减去3不够,借1还等于9。

9+3=(12)
12-3=(9)

d 你是怎样得到12-3=()这个题的答案的?
我是用 zuò yán fǎ xiāng jiā fǎ.
翻译: 我用加法想减法。

9+3=(12)
12-3=(9)

e 你是怎样得到12-3=()这个题的答案的?
12-2=10 10-1=9

图 2

熟手教师已经不约而同地意识到在这些课题的教学中可以渗透与培养早期代数思维。

中美两国小学数学教材中,都有类似“一图二式”“一图四式”的教学内容,美国教材中把这样的算式称为“Fact Family(算式组)”。虽然教材内容相近,但通过问卷调查和访谈发现,中国学生对互逆运算的掌握明显优于美国学生。对互逆运算的前测结果显示:美国学生使用正向思维解答人数占 14%,使用逆向思维解答人数占 9%,其他方法为 5%;中国学生使用正向思维解答人数占 33%,使用逆向思维解答人数占 39%,其他方法为 5%。经过互逆运算教学的后测结果显示:美国学生使用逆向思维解答人数占 26%,而中国学生则达到了 57%。

图 2 摘录了中美两国学生解答“12-3=()”的典型思维过程。图中 a、b 为美国学生, c、d、e 为中国学生。生 a 使用了“往回数”的方法(从 12 往回数了 3);生 b 通过关联算式 9+3=12 得出结果;生 d 与生 b 的想法类似,都是“想加法,算减法”;生 c 使用了“借 1 法”(2 减去 3 不够减欠 1,十位借 1 减后得 9);生 e 使用了“连减法”(12-2=10,10-1=9)。这些思路中

已经蕴含了一定的代数思维方法,如“若 $a+b=c$ 则 $c-a=b$ ”或“ $a-b-c=a-(b+c)$ ”等。

中国学生思路开阔,得益于长期的口算训练,这种训练可能在他们很小的时候便开始了。因此,即使在一年级,大部分学生都能比较熟练地进行 20 以内加减法的口算。强大的口算能力有助于学生深入理解互逆运算的深层结构关系。此外,在低年级,学生还经常需要解决“一图二(四)式”的实际问题(见图 3)。互逆运算的同时出现能帮助学生学会联系地进行思考,通过观察比较,识别算式之间的内在关系,并灵活地根据关系来解决

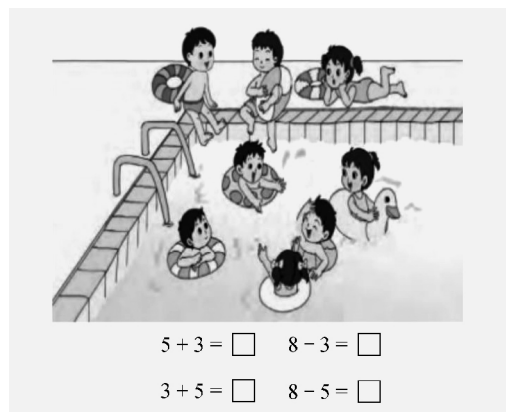


图 3

问题,而不是简单计算结果。除了加减、乘除之间的互逆关系,教学中还可以渗透加乘、减除之间的结构关系,通过基本运算之间的关系比较,打通加、减、乘、除四类运算之间的内在联系,尽早让学生在数的运算中接触到关系性思维,为后续代数学习做好准备。当然,发展关系性思维绝不局限于互逆运算,渗透代数思维的教学时机比比皆是。教师应深入挖掘,寻找浅显知识中隐藏的代数思想,并通过学生容易理解的方式展开教学。

(二)相等关系——数学表达,深理解

在小学阶段,学生接触到的大多是数的具体运算,需要求出结果。因此,学生通常把算式中常见的“=”符号简单地看作运算结果的输出符,而对“=”符号承担已知数与未知数之间桥梁的作用、表达数量之间等价关系的重要价值却难以理解。研究中,我们特别关注中美教师是否能更早地帮助学生建立对相等关系的理解。这种帮助表现为:有意识地引导学生感受“=”符号表示相等关系的内涵,感受“=”符号两边的量(式)之间的平等、对称、平衡、等价的关系,并鼓励学生尝试用数学语言表达这样的相等关系。例如,除了让学生填写常见算式 $6+4=\square$,也会特意安排学生填写 $10=\square+\square$, $6+\square=5+\square$ 。

对于帮助学生建立相等关系,中国教师比美国教师更加深入。这必须归功于教材的编排。如苏教版小学数学教材从一年级开始就设计了多种多样的例题或练习来帮助学生加深对“=”符号中相等关系的理解(见图4~图6)。如图6,学生可以不用计算结果,仅思考等号两边式子的相等特征,从而感受一种类似于天平的平衡关系。例如,在 $9+3=\square+\square$ 这个等式中,从一个加数9中减去1,则另一个加数3就得加上1,才能维持等式两边平衡(相等),即 $9+3=8+4$ 。这其中便隐含着 $a+b=(a-1)+(b+1)$ 这样的代数关系,

还可以进一步引申为 $a+b=(a-c)+(b+c)$ 。当然,这种感受对学生来说,并不需要十分深刻,但经过教师不断点拨引导,可促成学生对此不断积累体悟,在数的运算中尽早接触平衡与相等关系的代数核心思想,学会运用“=”符号处理表达式、表示数量关系等,使算术走向代数的过渡更为自然和顺畅。

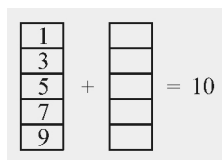


图4

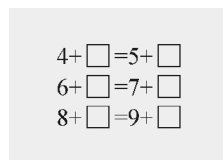


图5

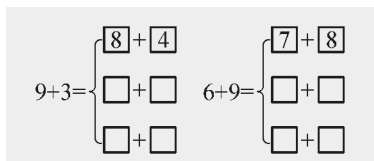


图6

(三)多元表征——丰富形式,探索规律

课例研究中,我们发现美国教师更关注表征形式的个性化,而中国教师则更关注表征内涵的深刻性。美国教师更舍得花费时间给予学生个性化表征的空间,更乐意用具体形象的表征形式让学生理解比较抽象的数学内容。所以,美国课堂给人的总体印象是“慢”,即容量小,节奏慢,教师与学生都很从容;而中国教师更喜欢鼓励学生进行具有较高思维难度的抽象性表征,更愿意用概括的形式让学生理解数学内容,因此,中国课堂给人的总体印象是“满”,即节奏快,内容多,要求也相对更高。

对于同一问题情境采用不同的表征方式能使使学生认识到问题的本质,理解不同表征方法之间的共同特征。研究中发现,教师要尽量鼓励、引导学生尝试用半抽象或抽象的符号语言来描述数量关系,让学生充分感受符号表征的简洁与概括,才能尽早开启代数思维的大门。

以运算律的教学为例。美国教材把加法

交换律的内容编排在一年级,一位美国教师教学运算律时,运用了“彩色圆片”和“方块火车”(一种用两种颜色的小正方体积木拼接成的长方体模型)表征,让学生用彩色圆片和方块火车分别摆出“ $2+3$ ”和“ $3+2$ ”的算式,再通过交换位置、反复比较,初步感受其中不变的规律。其使用的表征方式直观、具体,但也比较单一——当然,这样的教学安排与学生的年龄小也有关系。而中国教材(以苏教版教材为例)对加法交换律的正式安排在四年级,因此,课堂上大多数中国教师会鼓励学生写出一些与“ $3+2=2+3$ ”具有同样特征的算式(如“ $10.5+20.1=20.1+10.5$ ”“ $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ ”等),尝试寻找反例,最终通过不完全归纳法得出加法交换律的结论。在此过程中,学生往往会尝试用图形、符号甚至字母去表征算式的特征(如“ $\triangle+\square=\square+\triangle$ ”以及“ $a+b=b+a$ ”等),并深入讨论符号和字母等不同表征方式之间相同的数学内涵。中国教师更善于帮助学生用抽象、概括的数学语言描述现实世界中复杂多变的数量关系。这种抽象的符号表征对发展学生的思维颇有好处,也是后续代数学习的重要积累。

在“探索规律”的教学研究上,中国教师也比美国教师更胜一筹。中国教师常常会借助对图形、算式中变化规律的探索,帮助学生感受初步的函数模型。即使教材中并没有明确要求,教师在教学中也会补充一些练习,帮助学生深化认识。

例如,教师可以设置如下练习:

摆一个正方形需要4根小棒,摆一摆,想一想,填一填。

正方形的个数	1	2					...
小棒的根数	4						...

这样的操作实践,往往能激发学生探究

的兴趣。在讨论的过程中,学生会发现有很多有趣的结构和联系。比如,小棒的根数总是正方形个数的4倍,因此,无论摆的数量怎样变化,其中都包含一个不变的规律,即正方形的个数 $\times 4$ =小棒的根数,还可以想成 $\square \times 4 = \square$ (正比例函数的模型也隐含其中)。基于这样的关系,无论摆多少个正方形,都可以通过4倍的关系求得小棒的根数;反之,也可以通过摆了多少根小棒,用逆运算求出正方形的个数;还可以感受因数与积的变化规律,尝试用不同的方式去表征正方形个数与小棒根数之间的关系,进一步加深图形变化中探索规律的学习经验。

再如,教师还可以通过一些简单的数列,如1,3,5,7,9,...,让学生探索一系列规律排列的数彼此之间的位置与数值关系,寻求这列数中的其他未知项。虽然学生很可能用一个一个往下数的办法寻求答案,但显然他们也能想到用图形、字母表征的方法,探索每一个数与前后两数之间的联系,并运用关系建立模型解决问题。

可见,多元表征引导学生从模型的算术意义走向代数内涵的理解,帮助学生积累数学学习中模式与规律探索的学习经验,减少从具体形象思维到抽象概括思维过渡的障碍,对早期代数思维的培养也具有重要意义。

参考文献:

- [1] 曹一鸣. 十三国数学课程标准评介(小学、初中卷)[M]. 北京:北京师范大学出版社,2012.
- [2] 蔡金法,江春莲,聂必凯. 我国小学课程中代数概念的渗透、引入和发展:中美数学教材比较[J]. 课程·教材·教法,2013(6).
- [3] 章勤琼,麦克斯·斯蒂芬斯. 小学阶段“早期代数思维”的内涵及教学——墨尔本大学教授麦克斯·斯蒂芬斯访谈录[J]. 小学教学(数学版),2016(11).